

## 19. POLÍGONOS REGULARES

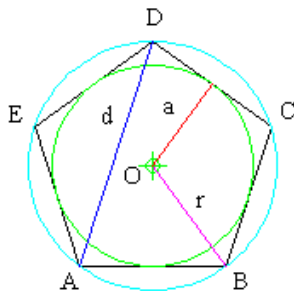
### 19.1. Características generales

Los polígonos regulares son los que tienen los lados y los ángulos iguales, es decir, son equiláteros y equiángulos. Son inscriptibles y circunscriptibles. El radio de la circunferencia circunscrita se llama radio del polígono. El radio de la circunferencia inscrita se llama apotema del polígono. Si trazamos todas las diagonales del mismo tamaño en un polígono obtenemos un polígono estrellado inscrito.

### 19.2. Rectas y puntos notables

El **centro O** de un polígono regular es un punto equidistante de sus vértices, por lo que es centro de su **circunferencia circunscrita** y punto de intersección de las **mediatrices** de sus lados. También es equidistante de sus lados, siendo centro de su **circunferencia inscrita** y punto de intersección de las **bisectrices** de sus ángulos.

El **radio r** de un polígono regular es la distancia entre el centro del polígono y cada uno de sus vértices. Es el radio de su **circunferencia circunscrita**.



La **apotema a** de un polígono regular es la distancia entre el centro del polígono y cada uno de sus lados. Es el radio de su **circunferencia inscrita**.

La **diagonal d** es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono. Según el número de lados del polígono variará el número de diagonales, que tendrán distintos tamaños.

En los polígonos regulares se puede calcular el número de diagonales **Nd** en función del número de lados, **n**:

$$Nd = (n-3)n/2$$

### 19.3. Ángulos de los polígonos regulares

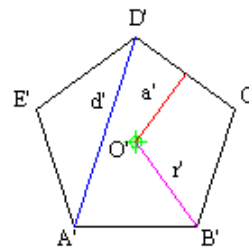
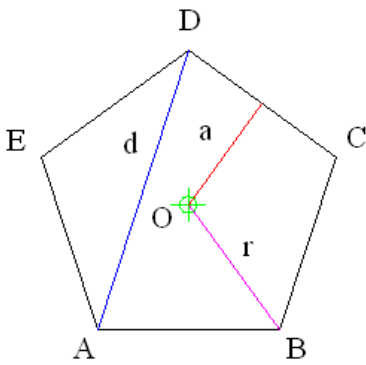
El ángulo  **$\alpha$**  formado por los dos lados consecutivos de un polígono regular de **n** lados vale:

**$\alpha = 180^\circ - 360/n$** , ya que el polígono puede dividirse por sus radios en **n** triángulos isósceles.

### 19.4. Semejanza entre polígonos regulares

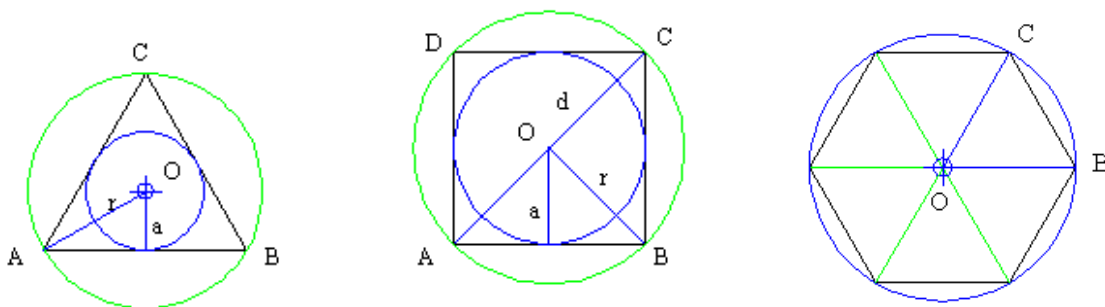
Los polígonos regulares que tienen el mismo número de lados son siempre semejantes entre sí, por lo tanto sus elementos son directamente proporcionales. Entre dos pentágonos regulares se verifica que:

$$AB/A'B' = d/d' = a/a' = r/r'$$



### 19.5. Polígonos regulares (triángulo, cuadrado, hexágono)

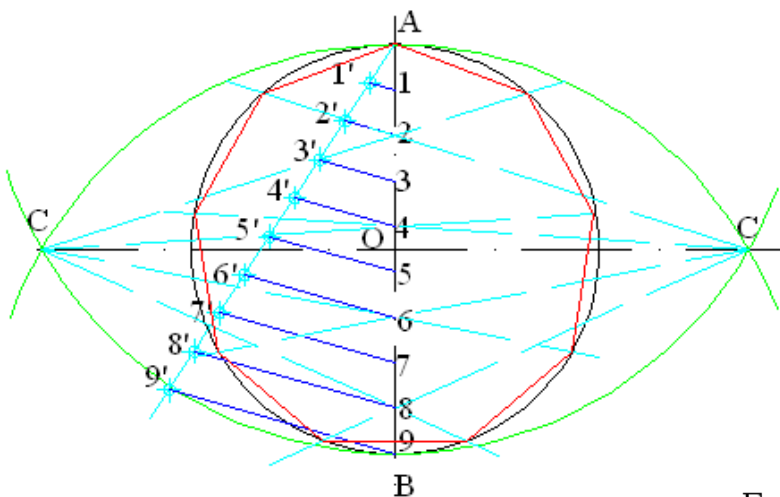
El único triángulo regular es el **triángulo equilátero**, y el único cuadrilátero regular es el **cuadrado**.



El **hexágono** es el único polígono regular que tiene el **lado** igual que el **radio**.

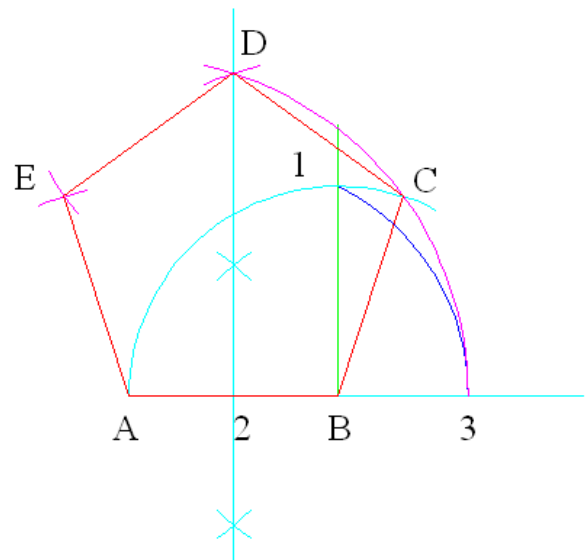
Esta es una propiedad que se comprueba fácilmente pues sus radios lo dividen seis triángulos equiláteros.

### 19.6. Trazados generales y particulares



Los trazados particulares nos sirven para dibujar sólo un tipo de polígonos regulares, a partir del lado o del radio. Estas construcciones son exactas en su mayoría.

Los trazados generales de los polígonos regulares nos sirven para dibujar cualquier polígono, teniendo como dato el lado o el radio. Estas construcciones no son exactas.



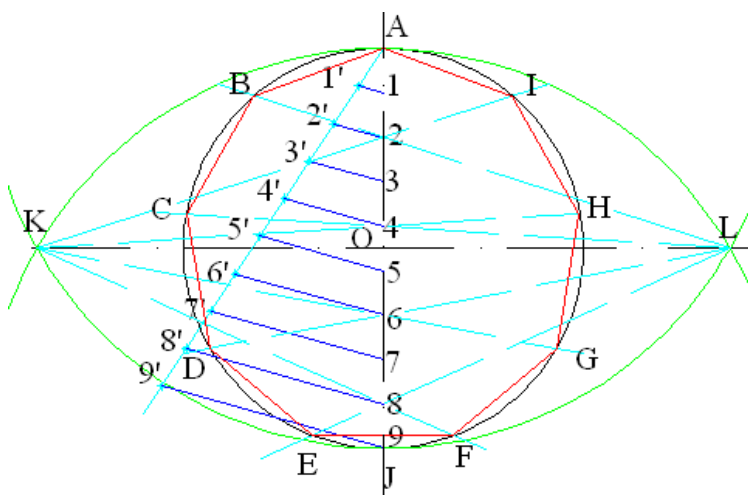
## 19.7. Trazados generales

Vamos a ver dos: la construcción general a partir del **radio** y la construcción general a partir del **lado**.

### 19.7.1. Trazados generales a partir del radio

Se dibuja en primer lugar la circunferencia correspondiente. El problema se basa en dividir dicha circunferencia en tantas partes iguales como lados tenga el polígono que queremos trazar. Y este es un problema gráfico que no tiene solución general exacta.

1.- Dividimos un diámetro de la circunferencia en tantas partes iguales como lados tenga el polígono, aplicando el teorema de Tales.



2.- Numeramos de **0** a **n**. En nuestro ejemplo **n=9**, porque vamos a trazar un **eneágono**.

3.- Trazamos dos arcos con centro en **A** y en **J** y radio el **diámetro**. Estos arcos se cortan en los puntos **K** y **L**.

4.- Unimos los puntos **K** y **L** con las división **2**. El segmento **L2** corta a la circunferencia en el punto **B**. El arco **AB** es la novena parte de la circunferencia, aproximadamente.

5.- Obtenemos las mismas medidas si unimos **L** con **4**, **6**, **8**, obteniendo los puntos **C**, **D** y **E**. Si unimos el punto **K** con **2**, **4**, **6**, **8**, obtenemos los puntos **F**, **G**, **H**, **I**. Si los unimos tenemos el **eneágono** buscado y la circunferencia dividida en **9** partes

6.- También se puede trasladar la magnitud del arco y dibujamos el **polígono inscrito** en la circunferencia de partida.

Para dibujar el **polígono circunscrito** a dicha circunferencia se trazan tangentes en cada uno de los puntos **A**, **B**, **C**... obtenidos.

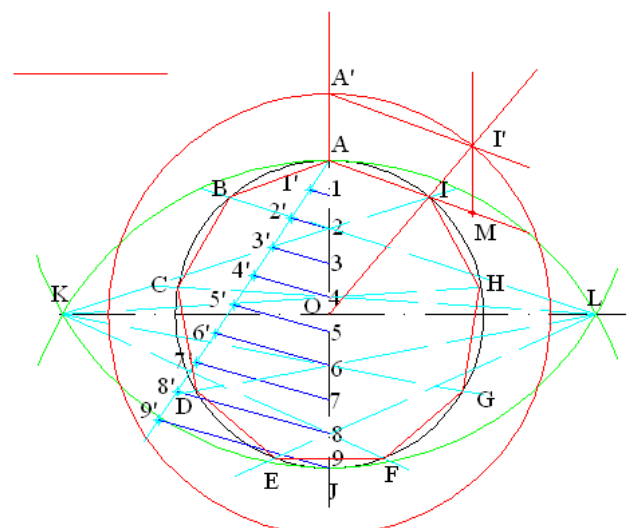
Se realiza esta operación sea cual sea el valor de **n**.

### 19.7.2. Trazados generales a partir del lado

1.- Hacemos como en el caso anterior, dividiendo la circunferencia en **n** partes iguales en nuestro caso **9**.

2.- Sobre un lado llevamos la medida del lado dado **AM**.

3.- Prolongamos los radios **OA** y **OI**.

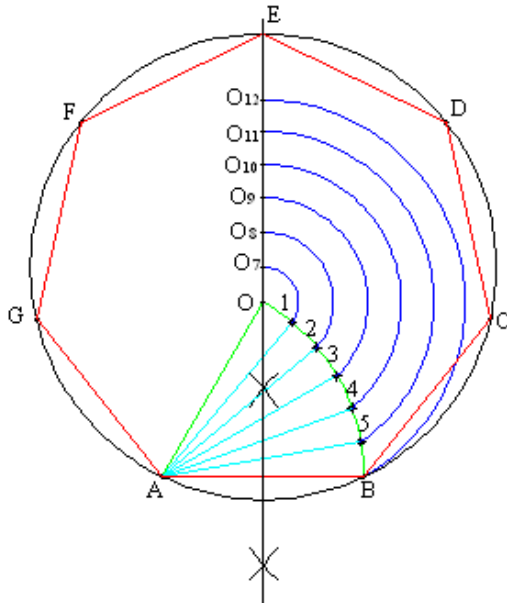


4.- Por **M** trazamos una paralela a **OA** que corta a la prolongación del radio **OI** en **I'**

5.- Trazamos una circunferencia de radio **OI'** y es la solución buscada.

También se puede llevar la prolongación después de **A** en este caso la paralela será al radio **OI**.

### 19.7.3. Dibujar un polígono de 6 a 12 lados dado el lado



1º.- Dibujamos el segmento **AB**, lado del polígono.

2º.-Trazamos la mediatriz del segmento **AB**

3º.- Con centro en **A** y radio **AB** trazamos el arco de circunferencia **BO**. El punto **O** es el centro de la circunferencia del hexágono de lado **AB**.

4º.- Dividimos el arco **OB** en 6 partes iguales **1, 2, 3, 4, 5**.

5º.- Hacemos centro en **O** y con radios **O1, O2, O3, O4, O5** y **O6**, trazamos los arcos que cortan a la mediatriz en los puntos **O7, O8, O9, O10, O11, O12**, que son los centros de las circunferencias de los polígonos inscritos de **7, 8, 9, 10, 11** y **12** lados igual al lado dado **AB**

6º.- Tomamos la distancia **AB** con el compás y determinamos

los vértices del polígono.

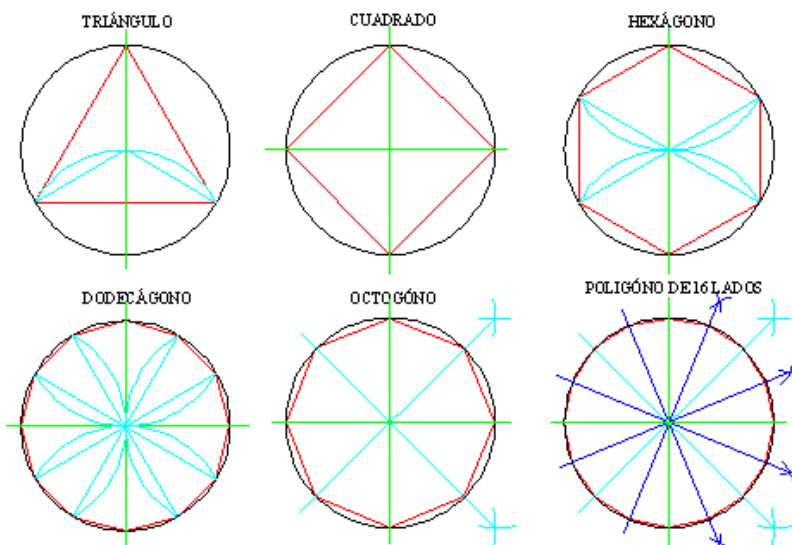
## 19.8. Trazados particulares

### 19.8.1. Cuando el dato es el radio

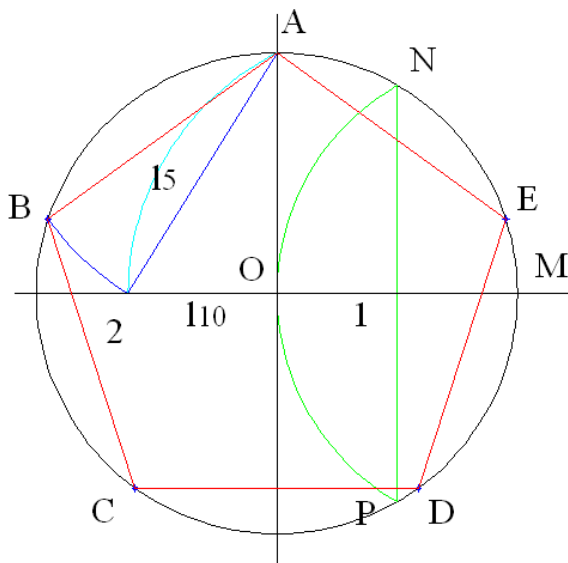
Existen varias construcciones exactas coincidentes con las posibilidades gráficas de dividir un ángulo completo en partes iguales.

Podemos dibujar así: el triángulo equilátero ( $360^\circ/3$ ), el cuadrado ( $360^\circ/4$ ), el hexágono ( $360^\circ/6$ ), el dodecágono ( $360^\circ/12$ ) o el octógono ( $360^\circ/8$ ).

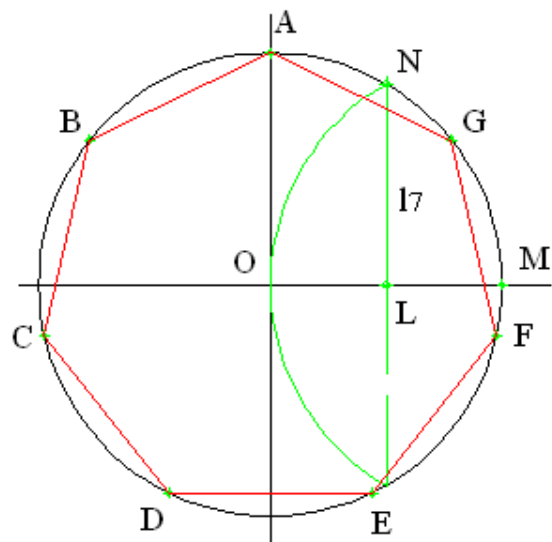
Si trazamos bisectrices de los ángulos obtenidos en cada caso hallaremos polígonos con el doble de lados.



**19.8.2. Pentágono regular de radio  $r$ .**

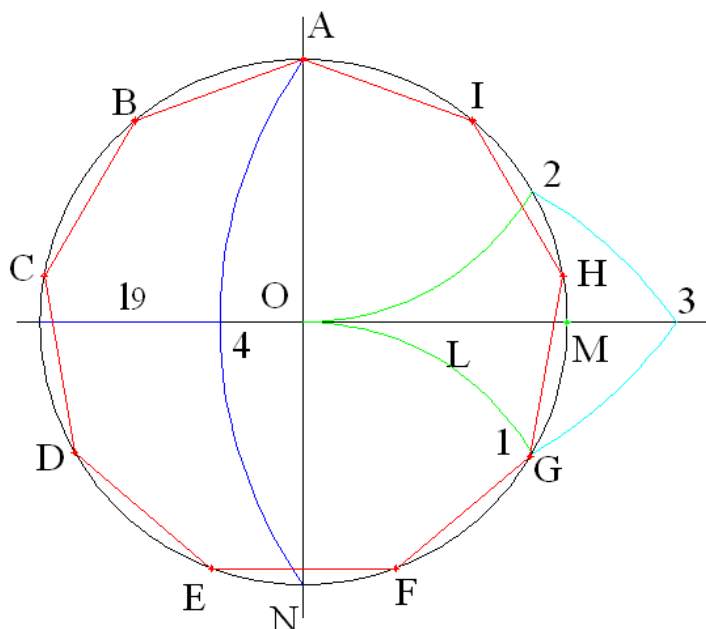


- 1.- Trazamos la circunferencia de radio dado.
- 2.- Trazamos dos diámetros perpendiculares.
- 3.- Con centro en **M** trazamos una circunferencia del mismo radio **MO** que corta a la circunferencia dada en dos puntos **NP** unimos esos puntos por medio de una recta que corta al diámetro en el punto **1**.
- 4.- Con centro en el punto **1** trazamos un arco de circunferencia de radio **1A** que corta en el punto **2** al diámetro.
- 5.- El segmento **A2** es el lado del pentágono inscrito, y el segmento **O2** el lado del decágono.
- 6.- Llevamos el lado **A2** y construimos el pentágono inscrito. Si llevamos el segmento **O2** construiremos el decágono inscrito.



**19.8.3. Heptágono regular de radio  $r$ .**

- 1.- Trazamos la circunferencia de radio dado.
- 2.- Trazamos dos diámetros perpendiculares.
- 3.- Con centro en **M** trazamos una circunferencia del mismo radio **MO** que corta a la circunferencia dada en dos puntos **NP** unimos esos puntos por medio de una recta que corta al diámetro en el punto **L**.
- 4.- El segmento **NL** es el lado del heptágono inscrito.
- 5.- Llevamos el segmento **NL** a partir del punto **A** y obtenemos el polígono buscado.



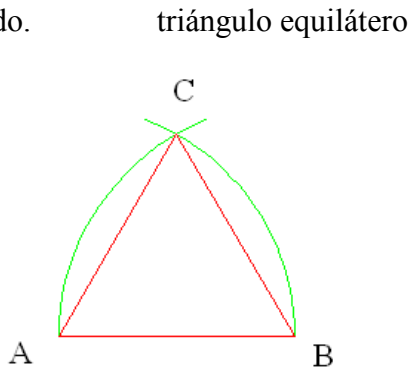
**19.8.4. Eneágono regular de radio  $r$ .**

- 1.- Trazamos la circunferencia de radio dado.
- 2.- Trazamos dos diámetros perpendiculares.
- 3.- Con centro en **A** trazamos una circunferencia del mismo radio **AO** que corta a la circunferencia dada en el punto **2**.

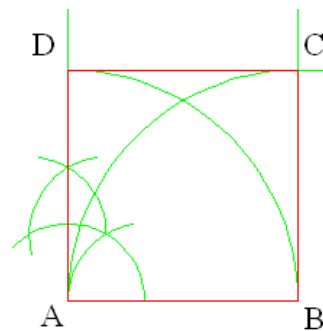
- 4.- Con centro en **N** trazamos una circunferencia del mismo radio **NO** que corta a la circunferencia dada en el punto **1**.
- 5.- Con centro en **N** trazamos una circunferencia de radio **N2** que corta a la prolongación del diámetro en el punto **3**.
- 6.- Con centro en **A** trazamos una circunferencia de radio **A1** que corta a la prolongación del diámetro y al arco anterior en el punto **3**.
- 7.- Con centro en el punto **3** trazamos una circunferencia de radio **3A = 3N** que corta al diámetro en el punto **4**. El resto del diámetro es el lado del eneágono inscrito buscado. Llevamos el segmento **1<sub>9</sub>** a partir del punto **A** y obtenemos el polígono buscado.

### 19.9. Dado el lado

Recordamos las construcciones del **triángulo equilátero**, el **cuadrado** y el **hexágono regular** a partir del lado.

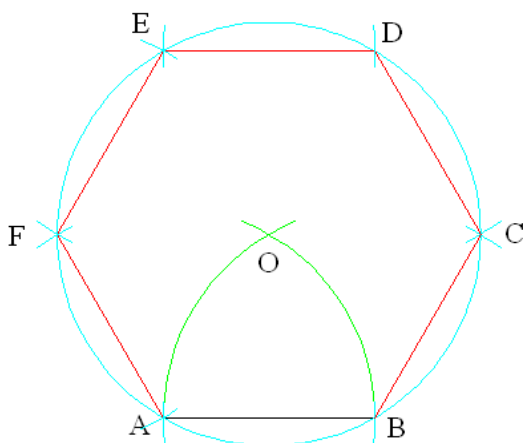


- 1º.- Hacemos centro en **A** y **B** con radio **AB**, los dos arcos se cortan en **C**.
- 2º.- Unimos **C** con **A** y con **B**



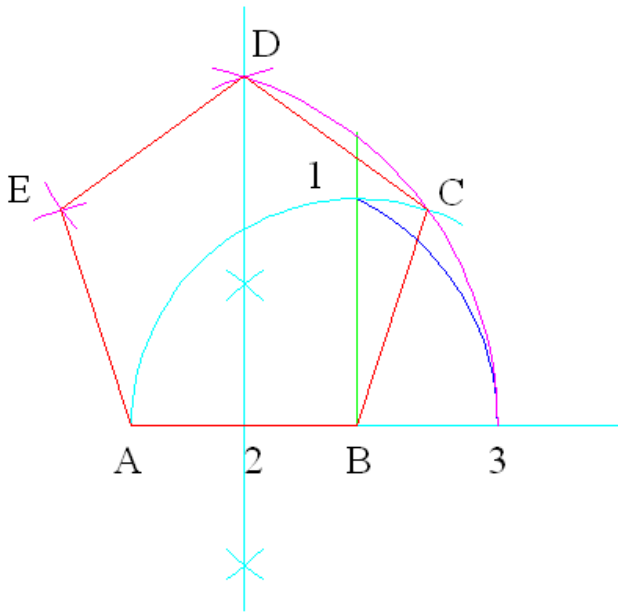
- 1º.- Por un extremo del lado levantamos una perpendicular.
- 2º.- Sobre esta llevamos el lado punto **D**, desde **B** y trazamos paralelas y obtenemos **C**. O trazamos los arcos desde **A** y **B** tal como vemos

Hexágono



- 1º.- Hacemos centro en **A** y trazamos el arco **BO**, hacemos centro en **B** y trazamos el arco **AO**.
- 2º.- Desde el punto **O** trazamos una circunferencia de radio **OA = OB**.
- 3º.- Sobre la circunferencia llevamos la longitud del lado **AB** y obtenemos el hexágono buscado

**19.9.1. Pentágono regular dado el lado.**



Las construcciones exactas del **pentágono regular** se deben a **Hipócrates** y se basan en la **proporción áurea** pues la razón entre la diagonal y el lado del pentágono es igual a  $\Phi$ :  $d/l=\Phi$ .

Cuando el dato es el lado AB:

1º.- Dibujamos la perpendicular al lado dado desde el punto **B**.

2º.- Trazamos la mediatriz de dicho lado. Con centro en **B** y radio **AB** trazamos un arco que corta a la perpendicular en el punto **1**.

3º.- Con centro en el punto **2** de la mediatriz trazamos un arco de radio **2-1** que corta a la prolongación de

**AB** en el punto **3**.

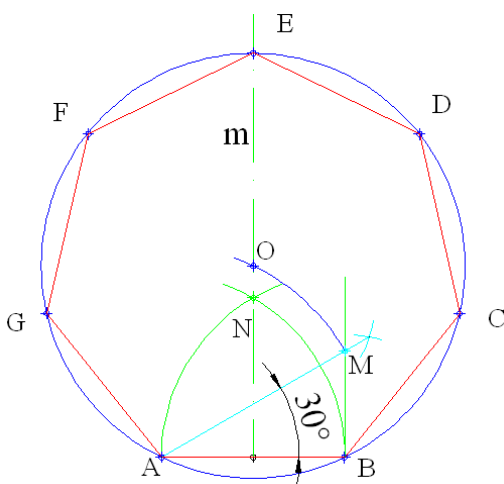
4º.- El segmento **A3** es la diagonal del pentágono, pues  $A3/AB=\Phi$ .

5º.- Para construir el pentágono basta con realizar una triangulación colocando adecuadamente lados y diagonales.

6º.- Con centro en el punto **B** y radio **A-3** trazamos un arco de circunferencia, con centro en el punto **A** trazamos otro arco del mismo radio que se cortan en el punto **D** y al pasar nos determina el punto **C**.

7º.- Con centro en **A** y en **D** y radio **AB** trazamos dos arcos que se cortan en el punto **E**. Unimos los puntos y tenemos el pentágono buscado.

**19.9.2. Heptágono regular dado el lado.**



1º.- Trazamos la mediatriz del lado dado **AB**, recta **m**.

2º.- Por el extremo **B** levantamos una perpendicular.

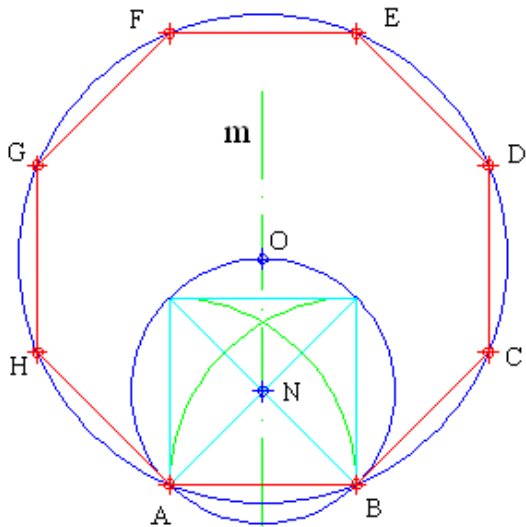
3º.- Trazamos la bisectriz del ángulo **NAB** que resulta un ángulo de **30º**. Esta bisectriz corta a la perpendicular a lado **AB** por el punto **B** en **M**.

4º.- Con centro en **A** y radio **AM** trazamos el arco de circunferencia que corta a la mediatriz de **AB** recta **m** en el punto **O**.

4º.- Trazamos una circunferencia de centro **O** y radio **OA**

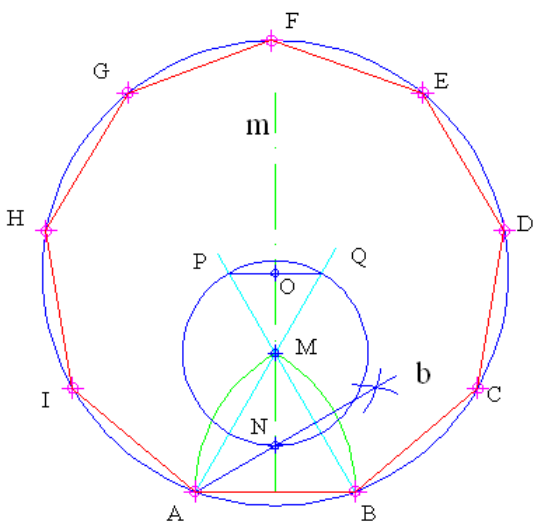
5.- Llevamos la longitud del lado dado sobre la circunferencia y obtenemos el heptágono.

**19.9.3. Octógono regular dado el lado.**



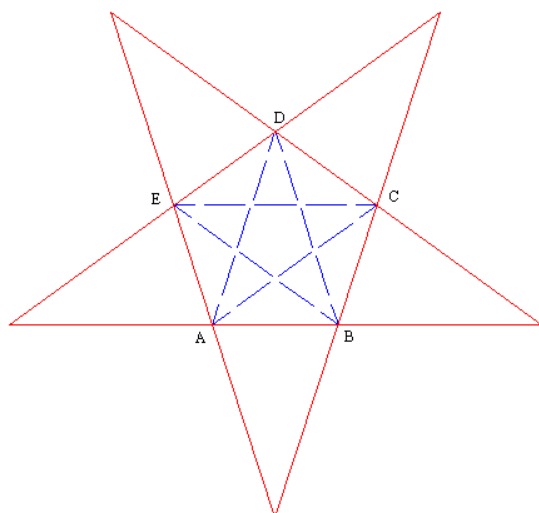
- 1º.- Trazamos la mediatriz del lado dado **AB**, recta **m**.
- 2º.- Construimos un cuadrado de lado **AB**.
- 3º.- Trazamos las diagonales del cuadrado anterior que se cortan en el punto **N**.
- 4º.- Con centro en **N** trazamos la circunferencia circunscrita al citado cuadrado que corta a la mediatriz en el punto **O**.
- 5º.- Trazamos una circunferencia de centro **O** y radio **OA**
- 6º.- Llevamos la longitud del lado dado sobre la circunferencia y obtenemos el octógono.

**19.9.4. Eneágono regular dado el lado.**



- 1º.- Trazamos la mediatriz del lado dado **AB**, recta **m**.
- 2º.- Construimos un triángulo **ABM**, trazamos la bisectriz **b** del ángulo **MAB** que corta a la mediatriz **m** en el punto **N**.
- 3º.- Trazamos la circunferencia de centro **M** y radio **MN**. Que corta a la prolongación de los lados del triángulo en los puntos **P** y **Q**.
- 4º.- Unimos **P** y **Q** que corta a la mediatriz **m** en el punto **O** que es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.
- 5º.- Trazamos una circunferencia de centro **O** y radio **OA**
- 5.- Llevamos la longitud del lado dado sobre la circunferencia y obtenemos el eneágono.

**19.9.5. Polígonos estrellados.**



Si dibujamos todas las diagonales de igual tamaño de un polígono obtenemos un polígono estrellado. Si prolongamos sus lados también.

Los **polígonos regulares estrellados** tienen mucha aplicación en el mundo del diseño. En el ejemplo vemos un pentágono regular con el estrellado definido por sus diagonales y el obtenido prolongando sus lados.

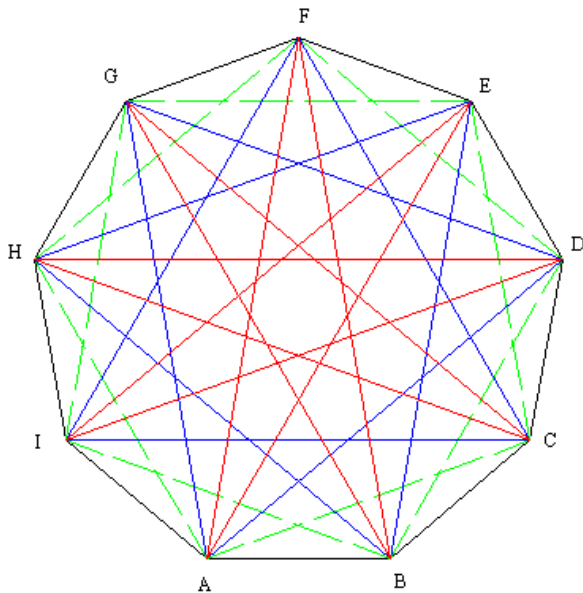


Si el polígono tiene más lados tendrá tantos estrellados inscritos como tamaños de diagonales. En el ejemplo vemos un eneágono con sus tres polígonos estrellados.

Genero ( $g$ ) es el nº de lados del polígono.

Especie ( $e$ ) es el nº de vueltas que hay que dar para cerrar el polígono.

Paso ( $p$ ) es el nº de divisiones que abarca un lado.



Siendo  $n$  el número de divisiones de la circunferencia se cumple:

$g \cdot p = n \cdot e$  de donde

$$g = n \cdot e / p$$

El número de lados  $g$  ha de ser un número entero, por lo que  $g$  tiene que ser múltiplo de  $p$ .

En general podemos decir que si tenemos  $n$  divisiones se pueden construir tantos polígonos estrellados como números enteros hay menores de su mitad ( $n/2$ ) y

primos con  $n$ .

Ejemplo: Siete divisiones

La mitad 3,5

Números enteros primos con 7 y menores de 3,5 son el 2 y 3

El heptágono tendrá dos polígonos de paso 2 y 3.